

#2-38 質問回答

5-47

3 の倍数である 3 桁の自然数がある。この数の百の位の数と十の位の数を加えると 8 で、また十の位の数と一の位の数を加えると 7 になる。このような数の個数として、最も妥当なものはどれか。

- (1) 2 個 (2) 3 個 (3) 4 個 (4) 5 個 (5) 6 個

警視庁 3 類 30 年 1 月 #47

ANS (2)

「3 の倍数である 3 桁の自然数」を $100a + 10b + c$ と表す。

- 「百の位の数と十の位の数を加えると 8 で、また十の位の数と一の位の数を加えると 7」から、

$$a + b = 8$$

$$b + c = 7$$

$$\therefore a - c = 1$$

a	9	8	7	6	5	4	3	2
c	8	7	6	5	4	3	2	1
b	×	0	1	2	3	4	5	6
a + b + c		15	14	13	12	11	10	9

このとき「3 の倍数の整数とは、各桁の数の和が 3 の倍数」にならなければならない。その数字の組合せを考える。

$$(a, b, c) = (8, 7, 0), (5, 3, 4), (2, 6, 1)$$

以上から、3 通りとなる。

POINT

- ✓ 3 桁の自然数を数で表すと、 $100a + 10b + c$ と表すことができる。
- ✓ 「3 の倍数である 3 桁の自然数」とは、各位の数の和が 3 の倍数になる。

7-39

男子 5 人、女子 4 人の中から委員 3 人を選出する方法のうち、少なくとも女子が 1 人含まれる場合の数として、最も妥当なのはどれか。

- (1) 70 通り (2) 72 通り (3) 74 通り (4) 76 通り (5) 78 通り

東京消防庁 2 類令和 2 年 8 月 #39

ANS (3)

「少なくとも女子が 1 人含まれる場合」としているので、全体から男子のみ選出される場合を引いて求める。

$${}^9C_3 - {}^5C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} - \frac{5 \times 4}{2} = 84 - 10 = 74 \text{ 通り}$$

POINT

組合せで求めてもよい。

- ✓ 女 1—男 2
- ✓ 女 2—男 1
- ✓ 女 3—男 0

13-39

四角錐 $OABCD$ において、底面 $ABCD$ は1辺の長さ 2 の正方形で $OA = OB = OC = OD = \sqrt{5}$ である。このとき四角錐 $OABCD$ に内接する球の半径として、最も妥当なのはどれか。

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$ (5) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

警視庁 1 類令和 3 年 4 月 #39

ANS (3)

四角錐の底面 $ABCD$ の 2 辺の中点をそれぞれ E, F として、頂点 O と中点 E, F の断面図を表わすと下図となる。

球体の断面は円となるので、三角形 OEF の内接円となる。

$$OE = OF = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

従って、 $\triangle OEF$ は正三角形となる。

$$OR = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

球体の半径 r を求める。

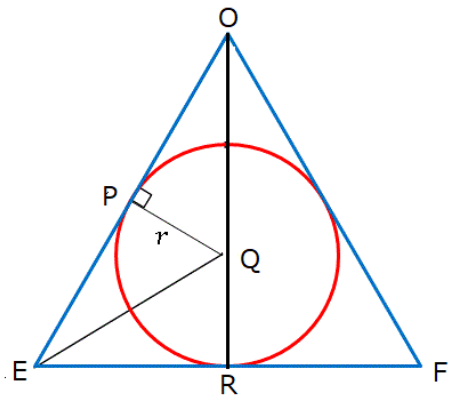
$\triangle OPQ$ について、 $OQ = \sqrt{3} - r$ となるので、

$$r^2 + 1^2 = (\sqrt{3} - r)^2$$

$$r^2 + 1 = 3 - 2\sqrt{3}r + r^2$$

$$2\sqrt{3}r = 2$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



14-25

1 題解いて正しければ 3 点もらえ、間違えると 1 点引かれるという計算問題がある。100 題解いたとき、あり得ない点数として、最も妥当なのはどれか。

(1) 16

(2) 52

(3) 102

(4) 132

(5) 176

警視庁特捜官平成 31 年 1 月 #25

ANS (3)

正解問題数を n ($n > 0$ 自然数) とすると、不正解の問題数は $100 - n$ となり、下記式をつくることができる。

$$3n - (100 - n) = 4n - 100$$

従って、解答選択肢をそれぞれ検証していくと、下記の通り選択肢(3)があり得ない点数となる。

$$(1) \quad 4n - 100 = 16 \quad n = \frac{116}{4} = 29$$

$$(2) \quad 4n - 100 = 52 \quad n = \frac{152}{4} = 38$$

$$(3) \quad 4n - 100 = 102 \quad n = \frac{202}{4} = 50.5$$

【別解】

100 問、全てを正解した場合 300 点となり、1 問間違える毎にその点数から、 $3 + 1 = 4$ 点が引かれていくと考える。つまり、300 点から 4 の倍数を引いた点数があり得る数となる。

全ての選択肢を検証すると、あり得ない点数となるのは (3) である。

$$\frac{300 - 102}{4} = \frac{198}{4} = 49.5$$

18-44

ある規則性をもつ次のような数列がある。

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}, \dots$$

この数列の第 n 項において、はじめて $\frac{8}{23}$ が現れるとするとき、 n の値として、最も妥当なのはどれか。

- (1) 21 (2) 22 (3) 23 (4) 24 (5) 25

警視庁 1 類平成 28 年 5 月 #44

ANS (3)

下記の通り、それぞれの項と初項 $\frac{2}{3}$ との差をとると、 $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{12}, \frac{4}{15}$ となる。

$$\text{第 2 項} \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{第 3 項} \quad \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{第 4 項} \quad \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{3}{12}$$

よって第 n 項と初項との差は、

$$\frac{n-1}{3n}$$

と言える。

従って、 $\frac{8}{23}$ と初項の差は、

$$\text{第 } n \text{ 項} \quad \frac{2}{3} - \frac{8}{23} = \frac{n-1}{3n} \Rightarrow \frac{46}{69} - \frac{24}{69} = \frac{n-1}{3n}$$

$$\frac{n+1}{3n} = \frac{22}{69} \Rightarrow 69(n-1) = 22 \times 3n \Rightarrow 3n = 69 \quad \therefore n = 23$$

$n = 23$ が求まる。

【別解】

分数で表された数列の 2 番目、5 番目は約分されていることが想像できるので、下記の数列であることが分かる。

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}, \dots \Rightarrow \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{6}{15}, \dots$$

従って、分数の分子が公差 1 の等差数列、分母が公差 3 の等差数列であるといえるので、下記の通り 7 項まで書くと、 $\frac{8}{23}$ は約分された数であることが分かる。